数理解析研究所講究録
488巻 1983年 1-26

C*環とK理論

横浜市大　中神 祥臣（Yoshiomi Nakagami）

1. まえがき　環またはC*環のカテゴリーから可換群のカテゴリーへのKファンクターを定義して，環またはC*環のもつ特徴をK群の性質を用いて調べるのがK理論の目的である．とくに対象が環，C*環または可換C*環のどれであるかにより，それぞれ代数的K理論，C*環のK理論または位相的K理論という．これらの間には

代数的K理論	⊃	C*環のK理論	⊃	位相的K理論
（代数幾何）		（作用素環）		（代数的位相幾何）
Grothendieck		?		Atiyah - Hirzebruch

の関係があるが，C*環のK理論は広い意味での位相的K理論と解釈するのが自然である（バナッハ環のK理論もある）．

代数的K理論や位相的K理論はRiemann - Roch型の定理を定式化する中で生み出され，既に二十数年の歴史をもつ．C*環のK理論に関しては，古くはAtiyah, Breuer, Coburn, Douglas, Singer 等の仕事や，漸く後のKasparovによるKホモロジーの定義（1973），BDF理論（1973～7），Elliottの次元

群の定義(1976)などあったが，本格的に始まったのはConnes [4], Cuntz [5], Kasparov [6], Pimsner-Voiculescu [7] 等の仕事が出始めた頃からであり，ここ2，3年の活況が目覚しい．ここでは便宜上，これまでに得られた成果を三つに大別してみる．

1.1　まず，K群をC^*環の代数的不変量として求めたものの代表例を表にする．

C^* 環	K^0群	K^1群	K_0ホモロジー	K_1ホモロジー
AF環	次元群	0		
Cuntz環 $\mathcal{O}_n$ $(n\geq 2)$	$\mathbb{Z}/(n-1)$	0	$\mathbb{Z}/(n-1)$	0
$\mathcal{O}_\infty$	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}$
Cuntz-Krieger環 $\mathcal{O}_A$	$\mathbb{Z}^n/(1-{}^tA)\mathbb{Z}^n$	$\mathrm{Ker}(1-{}^tA)$	$\mathbb{Z}^n/(1-A)\mathbb{Z}^n$	$\mathrm{Ker}(1-A)$
無理数回転環 A_θ	$\mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z}^2$		
被約群C^*環, $G=F_n$ $(n\geq 2)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^n$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^n$
$G=\mathbb{Z}/n * \mathbb{Z}/m$	$\mathbb{Z}^{n+m-1}$	0	$\mathbb{Z}^{n+m-1}$	0
葉層C^*環, $(V,F)=(\mathbb{T}^2, \mathrm{Fol\,I})$ 注1	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$		
$(V,F)=(\mathbb{T}^2, \mathrm{Fol\,II})$ 注1	$\mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z}$		
群C^*環, G: 単連結, 可解リー群	$\begin{cases}\mathbb{Z} & (\dim G=\text{偶})\\ 0 & (\quad =\text{奇})\end{cases}$	$\begin{cases}0 & (\dim G=\text{偶})\\ \mathbb{Z} & (\quad =\text{奇})\end{cases}$		
G: Heisenberg群 $(\dim G=\text{奇})$	0	0		$\mathbb{Z}^2$
G: 運動群	自由可換群	0		
$G=SL(2,\mathbb{C})$	0	無限階自由群		

1.2　つぎに，各種の未解決な問題をK群を用いて解決した例をあげる．

1.2.1 (Kaplanskyの問題) 単純C^*環で自明でない射影元をもたないものがあるか？ Blackaderは K理論と無関係に単位的C^*環の例を作り肯定的に解決．その後K理論を用いて Connes, Cuntz, Pimsner-Voiculescu等が各種の例を作った．葉層C^*環の場合には，この問題と葉層多様体の葉に横断的閉部分多様体が存在するかという問題とがほぼ同内容になる．注2

1.2.2 (Kadisonの予想) 単純C^*環 $C^*_{red}(F_n)$ は自明でない射影元をもたない．Cuntz, Pimsner-Voiculescu がK理論を用いて肯定的に解決．

1.2.3　AF環のAF環による拡大はAF環か？ Brownは Kホモロジーを用いて肯定的に解決．

1.2.4　Weighted shift の分類に成功．

以上はC^*環固有の問題であったが，他分野とも関連したものとしては

1.2.5 (Kirillov, Fell等の問題) 3次元 Heisenberg群 G に対し，完全系列 $0 \to C_0(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \otimes K \to C^*(G) \to C_0(\mathbb{R}^2) \to 0$ は分裂するか？ Kasparovにより否定的に解決．

1.2.6 (Novikovの予想) C^∞多様体 X の higher signature はホモトピー不変である．Miščenko と Kasparov はそれぞれ独立

に，分類空間 BG の K ファンクターを用いて，予想が肯定的である多様体の例を作っている．Kasparov は $\pi_1(X)$ が連結リー群の離散部分群に含まれていれば肯定的なことを示した．

1.3 最後に，Atiyah-Singer 型の定理に使われている例をあげる．指数定理には各種のものがあるが，一般に指数は整数値とは限らず，適当な C^* 環の K^0 群に値をとることが多い．

1.3.1 (Connes) 葉層多様体 (V, F) の葉の空間 V/F を調べるために普通は，横断測度を用いて指数定理を定式化するが，横断測度が存在しないときや，存在しても指数が零に成ってしまう場合には，K 群を用いた定式化が考えられる．例えば C^∞ 多様体に単連結可解リー群が自由に作用しているときなどはうまく行き，一般の葉層構造に対しても成立が予想されている．これにより 1.2.1 を解決．

1.3.2 (Connes-Moscovici) 等質空間 G/H 上の G 不変擬微分作用素 P により与えられる方程式 $Pu = 0$ の L^2 解は既約離散系列の有限和であることを示している．

1.3.3 (Baum-Douglas) K ホモロジーを用いて各種指数定理の統一化の試み．

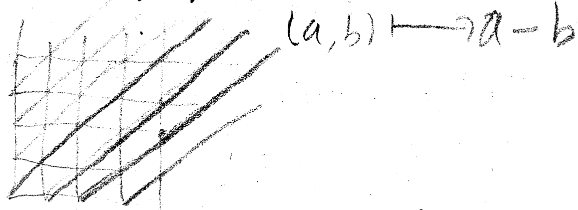
1.3.4 (Miščenko-Fomenko) ある多様体に対する Novikov の予想の解決．1.2.6 参照．

1.3.5 (Connes) 非可換微分幾何への応用．これを用いて

第一 Chern 類の値が整数値であることや，微分差分方程式が自明でない解を持つことなどが議論できる．

以上でわかるように C^* 環で K 理論を研究する動機にはいろいろな事が考えられるが，今後も，C^* 環の位相的性質の研究，各種指数定理を用いた研究，表現論への応用，非可換微分幾何や微分差分方程式の研究などが期待される．なお，非可換微分幾何の重要性は境氏によっても提唱されている．（コンパクト）多様体 V の接ベクトル場 $X \in TV$ は可換 C^* 環 $C(V)$ 上の非有界微分子である．A_θ 上の微分子の形をきめた高井氏の仕事が Connes の例と一致していることは興味深い．

(a, b)



2. K群の定義

2.1 可換半群 H から可換群 G を $(H\times H)/D$ $(D=\{(h,h) : h\in H\})$ により作る．$j(h)=\{(h+h', h') : h'\in H\}$ とすれば，j は H から G への準同型写像である．H から可換群への準同型写像のうちで，ここで作った (G, j) は普遍性をみたすので，G を H の Grothendieck 群という．定義より直ちに

$$j(h) = j(h') \iff \exists\, k \in H \ : \ h + k = h' + k$$

可換半群 H_1, H_2 の Grothendieck 群をそれぞれ G_1, G_2 とする：$H_i \xrightarrow{j_i} G_i$ $(i=1,2)$．準同型写像 $\varphi : H_1 \to H_2$ が与えられると，(G_1, j_1) の普遍性を用いて G_1 から G_2 への準同型写像 $\tilde{\varphi}$ が導かれる：$\tilde{\varphi}\circ j_1 = j_2 \circ \varphi$．このとき φ が全射なら，$\tilde{\varphi}$ も全

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "\varphi"'] & G_1 \arrow[d, dashed, "\tilde{\varphi}"] \\ H_2 \arrow[r, "j_2"'] & G_2 \end{tikzcd}$$

射である. たとえば, $H=\mathbb{N}^n$ ならば, $G=\mathbb{Z}^n$ である.

2.2　単位的 C^* 環 A と無限次元可分ヒルベルト空間上のコンパクト作用素の全体 $\mathcal{K}$ とのテンソル積 $A\otimes\mathcal{K}$ の射影元全体 $\mathrm{Proj}(A\otimes\mathcal{K})$ を Murray-von Neumann の同値関係で割った $\mathrm{Proj}(A\otimes\mathcal{K})/\sim$ (つまり, $\mathrm{Proj}(A\otimes\mathcal{K})$ の連結成分の全体) は加法

$$[e_1]+[e_2]=[e_1'+e_2'] \quad \text{if } e_1\sim e_1',\ e_2\sim e_2',\ e_1'e_2'=0$$

により可換半群になる. この半群の Grothendieck 群を A の K群 または K^0 群 といい, $K(A)$ または $K^0(A)$ と書く.[注3]

$$j([e_1])=j([e_2]) \iff {}^{\exists}[e]:\ [e_1+e]=[e_2+e]$$

二つの単位的 C^* 環 A, B の間の準同型写像 $\varphi: A\longrightarrow B$ は自然に K群の間の準同型写像 $\varphi_*: K(A)\longrightarrow K(B)$ を導く. つまり, K は共変ファンクターである.

一般に, C^* 環 A に単位元を付加して得られる単位的 C^* 環を $A^\sim$ とすれば, $0\longrightarrow A\longrightarrow A^\sim \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}\longrightarrow 0$ は C^* 環の完全系列で, φ は分裂している. したがって

$$K(A^\sim)=\mathrm{Ker}(\varphi_*)\oplus K(\mathbb{C})$$

となる. ここで A の K群 (または K^0 群) を改めて $\mathrm{Ker}\,\varphi_*$ により定義する. A が単位的であれば, 前のものと一致する. 今後 $j([e])$ を $[e]$ と記す.

例. $K(\mathbb{C})=K(\mathcal{K})\cong\mathbb{Z}$, $\quad K(\mathcal{L}(\mathfrak{H}))=0$.

2.2.1　$n\times n$ 行列全体 $M_n=M_n(\mathbb{C})$ の増加列の間に $x\in M_n\longmapsto \begin{pmatrix} x & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in M_{n+1}$ のような埋蔵を考えると, $\mathcal{K}=\varinjlim M_n$ である. 単位的 C^* 環に対し次のような半群同型対応がある:

$$\mathrm{Proj}(\mathcal{K}\otimes A)/\sim\ \longleftrightarrow\ \varinjlim \mathrm{Proj}(M_n\otimes A)/\sim\ \longleftrightarrow\ (\text{有限生成射影的}A\text{加群全体})/\cong$$

$M_n(A) \curvearrowright A^{\oplus n} \curvearrowleft A$
タテ

ここで，バナッハ空間 $\underbrace{A\oplus \cdots \oplus A}_{n}$ は $n\times n$ 行列 $M_n(A)$ が作用する自由 A 加群である．
したがって，$M_n(A)$ の射影元 e に対し，射影的 A 加群 $e(A\oplus \cdots \oplus A)$ が対応している．

2.2.2　X がコンパクトで，$A=C(X)$ の場合には，位相的K理論のK群 $K(X)$ と C^*環のK群 $K(C(X))$ は一致する．さらに，代数的K理論のK群とも一致

$$(\text{有限生成射影的 } C(X) \text{ 加群全体})/\cong \ \longleftrightarrow\ Vect(X)/\sim$$
$$\longleftrightarrow\ X \text{ 上の連続ヒルベルト場の同値類の全体}$$

X が局所コンパクトのときは，$C(X\cup\{\infty\}) \cong C_0(X)^\sim$ であるから，$K(X)=K(C_0(X))$．

2.3　$(A^\sim\otimes K)^\sim$ のユニタリ元全体 $U((A^\sim\otimes K)^\sim)$ は乗法群になる．これを，その単位元の連結成分 $U_0((A^\sim\otimes K)^\sim)$ で割って得られる群（すなわち，$U((A^\sim\otimes K)^\sim)$ の連結成分の全体）を A の <u>K^1群</u> といい，$K^1(A)$ と表す．A が単位的のときは $A^\sim$ のかわりに A を用いて定義してもよい．一般には，$K^1(A)=K^1(A^\sim)$．注3

例　$K^1(\mathbb{C}) = K^1(K) = 0$，　$K^1(\mathcal{L}(\mathfrak{H})) = 0$ (Kuiper)

2.3.1　$n\times n$ ユニタリ行列 $U(n)$ の列の中に　$u\in U(n) \mapsto \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \in U(n+1)$ のような埋蔵を行うと，$U(\text{代数的} \varinjlim M_n) = \varinjlim U(n)$ となる．したがって，単位的 C^*環 A に対しては，次の同型対応がある：

$$(A) = U((A\otimes K)^\sim)/U_0((A\otimes K)^\sim) \longleftrightarrow \varinjlim U(n,A)/U_0(n,A) \longleftrightarrow \varinjlim GL(n,A)/GL_0(n,A)$$
$$\longleftrightarrow \varinjlim \pi_0(GL(n,A))$$

例　$K^1(C(X)) = H^1(X,\mathbb{Z}) = [X, \mathbb{C}^*]$　(1次元コホモトピー群)

2.3.2　二つの単位的 C^*環の間の準同型写像 $\varphi: A\to B$ は自然な準同型写像 $\varphi_*: K^1(A)\to K^1(B)$ を導く．

2.4　C^*環 A に実構造，つまり，A 上の写像 $a\mapsto a^-$ で

(i) $(\mu a+b)^- = \bar{\mu} a^- + b^-$ $(\mu \in \mathbb{C})$ (ii) $(a^-)^- = a$

(iii) $(ab)^- = a^- b^-$ (iv) $(a^*)^- = (a^-)^*$

をみたすものを与え，これにより不変なものへ議論を制限すれば，実ベクトル束に対応するK理論も得られる．

2.5 コンパクト群 G と C^*系 (A, G, α) に対して，G の $A \otimes \mathcal{K}(L^2(G)) \otimes \mathcal{K}$ への作用 $\hat{\alpha}$ を $\hat{\alpha}_t = \alpha_t \otimes \rho_t \otimes id$ とする．ただし，ρ は G の右正則表現から導かれる $\mathcal{K}$ 上の作用である．このとき，$\mathrm{Proj}((A \otimes \mathcal{K}(L^2(G)) \otimes \mathcal{K})^{\hat{\alpha}})/\sim$ の Grothendieck 群を <u>Equivariant K群</u> といい，$K_G(A)$ と書く．$A = C(X)$ のときは，$K_G(A) = K_G(X)$ である．$\boxed{K_G(A) \cong K(A \times_\alpha G)}$ が成りたっている．

3．<u>K群の基本的性質</u> K群を具体的に求めるときに使う性質のうちで代表的なものを幾つかあげておく．なかでも，ホモトピー不変性，六項完全系列，Bott の周期性が成りたつことは，K理論が一般コホモロジー理論であることを示している．連続性はホモトピー不変性と関連した性質であるし，Mayer-Vietoris の完全系列は六項完全系列とほぼ同値な内容である．最も大切なのが Thom 同型である．これは Bott の周期性を一般化したものであって，$\mathbb{Z}$ の接合積に関する六項完全系列と同値である． 3.1 ～ 3.8 のうちで接合積と関係した 3.6，3.7 以外は Banach 環でも証明されている．

3.1 <u>連続性</u> $K(\underrightarrow{\lim}\, A_n) = \underrightarrow{\lim}\, K(A_n)$

3.2 <u>ホモトピー不変性</u> C^*環 A, B に対し，$\varphi = \{\varphi_t : t \in [0,1]\}$ を $[0,1]$ から $\mathrm{Hom}(A, B)$ への連続写像とすれば，K群の準同型写像として，$(\varphi_0)_* = (\varphi_1)_*$．

3.3 半完全系列 C^*環の完全系列 $0 \to J \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\varphi} A \to 0$ に対して系列 $K^0(J) \xrightarrow{\iota_*} K^0(E) \xrightarrow{\varphi_*} K^0(A)$, $K^1(J) \xrightarrow{\iota_*} K^1(E) \xrightarrow{\varphi_*} K^1(A)$ はともに完全である.

証明 3.5の終りで必要となるK^1群の完全性のみを示す. K^0群に対しては Bottの周期性が示された時点で, 自動的にわかる. E は単位元をもつものと仮定できる. $v \in J^\sim$ は $w + \lambda 1$ $(w \in J)$ と表せるので, $\varphi_*(\iota_*[v]) = [\lambda] = 0$. 逆に, $[u] \in \mathrm{Ker}\,\varphi_*$ とする. $\varphi_*([u]) = 0$ であるから, $\varphi(u) \in U_0((K \otimes A)^\sim)$. したがって, $\varphi(u') = \varphi(u)$ をみたす $u' \in U_0((K \otimes E)^\sim)$ がある. $[u] = [u'^* u]$ である. また, $\varphi(u'^* u) = 1$ であるから, $v' \equiv u'^* u \in J^\sim$. したがって, $\iota_*([v]) = [u'^* u] = [u]$.

3.4 Index写像δ C^*環の完全系列 $0 \to K \to \mathcal{L}(\mathfrak{H}) \xrightarrow{\varphi} Q(\mathfrak{H}) \to 0$ に対し, $\varphi^{-1}(GL(Q(\mathfrak{H})))$ は $\mathfrak{H}$上のフレドホルム作用素の全体と一致する. そのような元xに対し, $\mathrm{ind}(x) = \dim(\mathrm{Ker}\,x) - \dim(\mathrm{Coker}\,x) \in \mathbb{Z}$ が指数(index)である. これを抽象化して $K^1(Q(\mathfrak{H}))$ から $K^0(K) \cong \mathbb{Z}$ への写像δを作りたい. もっと一般に次の補題が成り立つ. δのことを Index写像 または Connecting写像 という.

補題 C^*環の完全系列 $0 \to J \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\varphi} A \to 0$ に対し, $K^1(A)$ から $K^0(J)$ への準同型写像δが存在して, $K^1(E) \xrightarrow{\varphi_*} K^1(A) \xrightarrow{\delta} K^0(J) \xrightarrow{\iota_*} K^0(E)$ が完全系列になる.

証明の概略. Eが単位元をもつ場合のδの構成: $0 \to J \otimes M_n \xrightarrow{\iota \otimes id} E \otimes M_n \xrightarrow{\varphi \otimes id} A \otimes M_n \to 0$ は完全である. 同様な完全系列がM_nのかわりにKに対しても成り立つ. $[u] \in K^1(A)$ に対し, $u \in U(A \otimes M_n)$ と仮定できる. $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u' \end{pmatrix} \in U_0(A \otimes M_{n+m})$ となるような u' を選ぶ(たとえば, $u' = u^*$ とすればよい). この場合には, $(\varphi \otimes id)(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u' \end{pmatrix}$ となる $v \in U_0(E \otimes M_{n+m})$ がある. $v\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}v^*$ は $\varphi \otimes id$ の核に入るから, $J \otimes M_n$ $(\subset J \otimes K)$ の元である. $\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は $J^\sim \otimes K$ の元であるから, $v\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}v^* \in J^\sim \otimes K$. したがって, $[v\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}v^*] - [\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}] \in K^0(J^\sim)$.

実は，これは $K^0(J)$ の元である．実際，完全系列 $0 \to J\otimes K \to J^\sim\otimes K \xrightarrow{\varphi\otimes id} \mathbb{C}\otimes K \to 0$ を考えると，$\psi_*([v\begin{pmatrix}1_n&0\\0&0\end{pmatrix}v^*]-[\begin{pmatrix}1_n&0\\0&0\end{pmatrix}])=0$．そこで，$K^1(A)$ から $K^0(J)$ への Index 写像を $\delta([u])=[v\begin{pmatrix}1_n&0\\0&0\end{pmatrix}v^*]-[\begin{pmatrix}1_n&0\\0&0\end{pmatrix}]$ で定義する．これが Well defined であることを検証する際に，上で u' として u^* にしなかったことが生きてくる．δ が準同型写像であることは $\begin{pmatrix}u_1u_2&0\\0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}u_1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_2&0\\0&1\end{pmatrix}$ を用いて示される．

$K^1(A)$ における完全性：$[w]\in K^1(E)$ に対しては，上の v を $\begin{pmatrix}w&0\\0&w^*\end{pmatrix}$ とすれば，$\delta\circ\varphi_*([w])=[v\begin{pmatrix}1_n&0\\0&0\end{pmatrix}v^*]-[\begin{pmatrix}1_n&0\\0&0\end{pmatrix}]=0$．逆に，$\delta([u])=[v\begin{pmatrix}1_n&0\\0&0\end{pmatrix}v^*]-[\begin{pmatrix}1_n&0\\0&0\end{pmatrix}]$ が 0 ならば，$J^\sim\otimes K$ において $v\begin{pmatrix}1_n&0\\0&0_m\end{pmatrix}v^*\sim\begin{pmatrix}1_n&0\\0&0_m\end{pmatrix}$．したがって，$w\begin{pmatrix}v&0\\0&1_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1_n&0\\0&0_{m+k}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v^*&0\\0&1_k\end{pmatrix}w^*=\begin{pmatrix}1_n&0\\0&0_{m+k}\end{pmatrix}$ となる $w\in U(J^\sim\otimes M_{n+m+k})$ がある．ゆえに，$w\begin{pmatrix}v&0\\0&1_k\end{pmatrix}$ は $v_1\in E\otimes M_n$ により $\begin{pmatrix}v_1&0\\0&v_2\end{pmatrix}$ と表せる．したがって，$(\varphi\otimes id)(v_1)=u$，すなわち，$\varphi_*([v_1])=[u]$．

$K^0(J)$ における完全性：$\iota_*([v\begin{pmatrix}1_n&0\\0&0\end{pmatrix}v^*])=\iota_*([\begin{pmatrix}1_n&0\\0&0\end{pmatrix}])$ であるから，$\iota_*\circ\delta=0$．逆に，$\iota_*([e]-[1_n])=0$ ならば，$\begin{pmatrix}\iota(e)&0\\0&1_m\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1_n&0\\0&1_m\end{pmatrix}$．したがって，$v\begin{pmatrix}\iota(e)&0\\0&1_{m+k}\end{pmatrix}v^*=1_{n+m+k}$ となる $v\in U(E\otimes M_{n+m+k})$ がある．$u=(\varphi\otimes id)(v)$ とすれば，$\delta([u])=\iota_*([e]-[1_n])$．

E が単位元をもたないとき：C^*環の系列 $0\to J\xrightarrow{\iota} E^\sim\to A^\sim\to 0$ が完全になるので系列 $K^1(E)\to K^1(A)\xrightarrow{\delta}K^0(J)\to K^0(E^\sim)$ は完全である．$K^0(E^\sim)=K^0(E)\oplus\mathbb{Z}$ であるが，$\iota:J\to E^\sim$ は単射であるから，ι_* の像は $K^0(E)$ に値をとっている．

例　$J=K$，$E=\mathcal{L}(\mathfrak{H})$，$A=Q(\mathfrak{H})$ のときは，$K^0(\mathcal{L}(\mathfrak{H}))=K^1(\mathcal{L}(\mathfrak{H}))=0$ であったから，$K^1(Q(\mathfrak{H}))\overset{\delta}{\cong}K^0(K)\cong\mathbb{Z}$．

3.4.1　$K^1(A)\cong K^0(A\otimes C_0(\mathbb{R}))$．

単位区間 $I=[0,1]$ 上で $C_0(I)=\{f\in C(I): f(0)=f(1)=0\}$ とすれば，$A\otimes C_0(\mathbb{R})\cong$

$A\otimes C_0(I)$. これを A の懸垂(Suspension)といい SA と書き, $A\otimes\{f\in C(I): f(0)=0\}$ を A の錐(Cone)といい CA と書けば, C*環の完全系列 $0\to SA\to CA\to A\to 0$ を得る. ここでは, $a\in CA$ の CA/SA における剰余類と A における $a(1)$ とを同一視している. 一般に, CA の元 a はホモトピー $\{\varphi_t : t\in[0,1]\}$: $(\varphi_t a)(s)=a(ts)$ $(s\in I)$ により可縮(Contractible)であるから, $K(CA)=0$, $K^1(CA)=0$ である. ここで 3.4 の補題を上の完全系列に適用すれば, 3.4.1 が得られる.

3.5 Bottの周期性 $S^2A=S(SA)$ とすれば, $K^i(S^2A)=K^i(A)$ $(i=1,2)$.

これを示すには 3.4.1 とよく似た次の式を示せばよい.

3.5.1 $K^0(A)\cong K^1(A\otimes C_0(\mathbb{R}))$

3.4.1の証明に較べ, この証明には技巧が要求される. ここではAtiyah [3] の方法を用いる. まず, $\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C} : |z|=1\}$ の上の $C_0(\mathbb{T})=\{f\in C(\mathbb{T}) : f(1)=0\}$ と $C_0(\mathbb{R})$ を同一視して, $K^0(A)\cong K^1(A\otimes C_0(\mathbb{T}))$ を示すことにする.

証明の概略. Aが単位元をもつとき: (i) $Q_n(A)=\{a\in M_n(A) : a=a^*, Sp(a)\in\mathbb{Z}\}$ と埋蔵 $a\in Q_n(A)\mapsto\begin{pmatrix}a&0\\0&0\end{pmatrix}\in Q_{n+1}(A)$ を考える. $a\in\bigcup Q_n(A)$ のスペクトル分解 $a=\sum_{|j|\le\|a\|} je_j$ に対し, $[a]=\sum_{|j|\le\|a\|} j[e_j]$ とすれば, $K^0(A)\cong\varinjlim Q_n(A)/\sim$.

(ii) $K^1(SA)=K^1((SA)^\sim)$ について考える. $(SA)^\sim$ は $\{f\in A\otimes C(\mathbb{T}) : f(1)\in\mathbb{C}\}$ と同一視できる. したがって, $(SA)^\sim$ の元は Stone-Weierstrass 定理により, Laurant多項式 $z\in\mathbb{T}\mapsto\sum_{j\in\mathbb{Z}} z^j a_j\in A$ により一様近似される. 同様なことが $(SA)^\sim$ のかわりに $M_n((SA)^\sim)$ に対してもいえ, しかも, $K^1(SA)=\varinjlim U(M_n((SA)^\sim))/U_0(M_n((SA)^\sim))$.

(iii) (Exponential 写像) (i)のスペクトル分解 $a=\sum je_j\in M_n(A)$ に対し, $e^{2\pi tia}=(1-e_0)+\sum_{|j|\le\|a\|} e^{2\pi itj}e_j$ $(t\in[0,1])$ を作る. $\mathbb{T}\cong[0,1]$ とすれば, これは (ii) の元 $\delta(a)$

$$\exp(\varepsilon e_j)=1+\frac{\varepsilon e_j}{1!}+\frac{\varepsilon^2 e_j}{2!}+\cdots$$
$$=(e^\varepsilon-1)e_j+1=e^\varepsilon e_j+(1-e_j)$$

$: z\in\mathbb{T}\mapsto(1-e_0)+\sum z^j e_j\in M_n(A)$ と見なすことができる．$\delta(a)\in M_n((SA)^\sim)$ である．

(iv) 対応 $[a]\in K^0(A)\mapsto[\delta(a)]\in K^1(SA)$ が Well defined なことと，同型写像であることを示す．後者を示すには，Laurant 多項式を二つの Taylor 多項式の差に表し，Proj $(K\otimes A)$ から $U(K\otimes(SA)^\sim)$ の Taylor 多項式全体への対応をつける．その際，Atiyah の方法を用いると，多項式が1次式の計算に帰着できる．

(v)（Atiyah のトリック）Taylor 多項式 $z\in\mathbb{T}\mapsto\sum_{j=0}^{n}z^j a_j\in A$ を考える．基本変形を繰り返して

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ z & 1 & & \\ & z & \ddots & \\ & & z & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1}-za_n & a_n \\ z & 1 & & & \\ & z & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & z & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1}-za_n \\ z & 1 & & \\ & z & \ddots & \\ & & z & 1 \end{matrix}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n}z^j a_j & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

最初の行列は $M_{n+1}(A)$ の値をもつ1次式であり，最後は A に値をもつ n 次多項式である．

これを用いると (iv) の対応が1対1であることがわかる．

A が単位元をもたないとき：次の完全系列より明らかである．

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K^1(A\otimes C_0(\mathbb{R})) & \longrightarrow & K^1(A^\sim\otimes C_0(\mathbb{R})) & \longrightarrow & K^1(C_0(\mathbb{R})) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \| & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & K^0(A) & \longrightarrow & K^0(A^\sim) & \longrightarrow & K^0(\mathbb{C}) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

3.6 六項完全系列　C^*環の完全系列 $0\to J\xrightarrow{\iota}E\xrightarrow{\varphi}A\to 0$ に対し次の完全系列が成りたつ

$$\begin{array}{ccccc} K^0(J) & \xrightarrow{\iota_*} & K^0(E) & \xrightarrow{\varphi_*} & K^0(A) \\ {\scriptstyle\delta}\uparrow & & & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\ K^1(A) & \xleftarrow[\varphi_*]{} & K^1(E) & \xleftarrow[\iota_*]{} & K^1(J) \end{array}.$$

3.4の補題，3.4.1，3.5.1 を完全系列 $0\to J\otimes C_0(\mathbb{R})\to E\otimes C_0(\mathbb{R})\to A\otimes C_0(\mathbb{R})\to 0$ に適用して，3.3 を用いればよい．

3.7 Thom 同型　　$K^0(A)\cong K^1(A\times_\alpha\mathbb{R})$，$K^1(A)\cong K^0(A\times_\alpha\mathbb{R})$

α が自明な作用のときは，$A\times_\alpha\mathbb{R}\cong A\otimes C_0(\hat{\mathbb{R}})$ であるから，3.4.1 と 3.5.1 と同内容である．

Connes による証明の外にも，Rieffel，Elliott 等のものがある．ここでは方針だけにする．

証明の方針．まず $A=\mathbb{C}$ の場合を考察し，$K^1(C^*(\mathbb{R}))$ の生成元を求める（$\mathbb{C}\times_\alpha\mathbb{R}=$

$C^*(\mathbb{R})\cong C_0(\hat{\mathbb{R}})$). $C^*(\mathbb{R})\cong C_0(\mathbb{T})$, $C_0(\mathbb{T})^\sim\cong C(\mathbb{T})$ であるから, Bottの周期性のときの同型対応 3.5.1 により, $K^0(\mathbb{C})\cong K^1(C(\mathbb{T}))$. 1次元の射影元 e に対応する $K^0(\mathbb{C})$ の元 $[e]$ は $K^0(\mathbb{C})$ の生成元である. 3.5.1の証明のように, これに対応するユニタリ元 $z\mapsto(1-e)+ze$ の回転数が $K^1(C(\mathbb{T}))$ の生成元である:

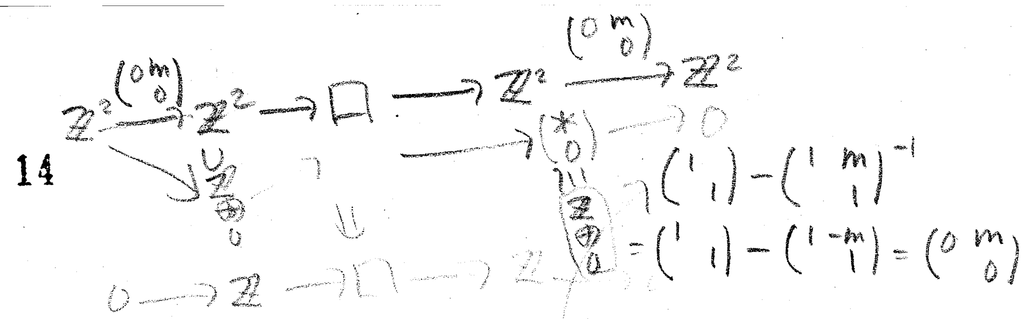
$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \longleftrightarrow & K^0(\mathbb{C}) & \longleftrightarrow & K^1(C(\mathbb{T})) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ 1 & & [e] & & [z\mapsto(1-e)+ze] \end{array}$$

そこで, $\boxed{C(\mathbb{T})\text{ で Winding 数 1 の関数 } z\mapsto z}$ に対応する $C^*(\mathbb{R})^\sim$ の元を求める:

$$\begin{array}{ccccc} C(\mathbb{T}) & \xleftrightarrow{\text{Cayley変換}} & C_0(\hat{\mathbb{R}}) & \xleftrightarrow{\text{Fourier変換}} & C^*(\mathbb{R})^\sim \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ z\mapsto z & & f(\mu)=\frac{\mu-i}{\mu+i} & & 1+\lambda(g) \\ & & =1+\hat{g}(\mu) & & \end{array}$$

ここでは $\hat{g}$ が $C_0(\hat{\mathbb{R}})$ の元となるようにした. 実際, $\hat{g}(\mu)=-2i/(\mu+i)$. また, λ は $L^2(\mathbb{R})$ 上の正則表現であり $\lambda(g)=\int g(t)\lambda(t)\,dt$ である. $t\mapsto\lambda(t)$ の無限小生成元を iH とすれば, $\lambda(t)=e^{itH}$ $(H=-i\frac{d}{dt})$. H のスペクトル分解 $H=\int_{\mathbb{R}}\lambda\, dE(\lambda)$ を用いると, $\lambda(g)=\iint_{\mathbb{R}\,\hat{\mathbb{R}}} g(t)e^{it\lambda}dE(\lambda)dt$ $=\hat{g}(-H)$ となる. したがって, $K^1(C^*(\mathbb{R}))$ の生成元は $[1+\hat{g}(-H)]$ と表せる.

このように $A=\mathbb{C}$ の場合の議論を, 接合積の場合に考え直す. $A\times_\alpha\mathbb{R}$ は $L^1(\mathbb{R},A)$ を稠密な部分*環として含む. そこで, $a\in A$ と $f\in L^1(\mathbb{R},A)$ に対し, $(af)(t)=af(t)$, $(fa)(t)=f(t)\alpha_t(a)$ とおくと, af, $fa\in L^1(\mathbb{R},A)$ となるので, A の元は $A\times_\alpha\mathbb{R}$ の Multiplier と見ることができる. このことを念頭に, 3.4.1 の Index写像に相当する写像を構成する. $[e]\in K^0(A)$ に対し, e が α_t で不変でないときには, α の摂動 $\alpha'_t=Ad_{u_t}\circ\alpha_t$ を用いて, $\alpha'_t(e)=e$ となるようにする. こうしても, $A\times_\alpha\mathbb{R}\cong A\times_{\alpha'}\mathbb{R}$ であるから, あらかじめ $\alpha_t(e)=e$ と仮定できる. さらに, $t\mapsto\alpha_t$ を導くユニタリ表現で $A\times_\alpha\mathbb{R}$ の Multiplier に値をもつものを $t\mapsto v(t)$ とし, その無限小生成元を iH とすれば, $\alpha_t(x)=v(t)xv(t)^*$, $v(t)=e^{itH}\in M(A\times_\alpha\mathbb{R})$. $He=eH$ となる. $A=\mathbb{C}$ の場合と同様に, $1+\hat{g}(eHe)$ は $A\times_\alpha\mathbb{R}$ の Multiplier でしかも可逆である. したがって $K^1(A\times_\alpha\mathbb{R})$ の元 $[1+\hat{g}(eHe)]$ が定まる. そこで, $\delta([e])=[1+\hat{g}(eHe)]$ とおけば, δ



は $K^0(A)$ から $K^1(A\times_\alpha \mathbb{R})$ への同型写像となる．$K^1(A)$ から $K^0(A\times_\alpha \mathbb{R})$ への同型写像も懸垂を考えれば得られる．

3.7.1　<u>離散接合積に対する六項完全系列</u> ([7])　C*接合積 $B\times_\beta\mathbb{Z}$ に対し次の系列は完全である：

$$\begin{tikzcd} K^0(B) \arrow[r, "id-\beta_*^{-1}"] & K^0(B) \arrow[r, "\iota_*"] & K^0(B\times_\beta\mathbb{Z}) \arrow[d] \\ K^1(B\times_\beta\mathbb{Z}) \arrow[u] & K^1(B) \arrow[l, "\iota_*"] & K^1(B) \arrow[l, "id-\beta_*^{-1}"] \end{tikzcd}$$

これは Pimsner-Voiculescu により示され，すぐその後から Cuntz, Connes, Elliott 等による別証明が与えられた．<u>Thom同型を用いた証明</u>：$(A,\mathbb{R},\alpha)=\mathrm{Ind}_{\mathbb{Z}\uparrow\mathbb{R}}(B,\mathbb{Z},\beta)$ とする．すなわち，A を $\{f\in B\otimes C(\mathbb{R}) : f(t+1)=\beta(f(t))\}$ で，$(\alpha_t f)(s)=f(s-t)$ とする．このときには，$A\times_\alpha\mathbb{R}\cong(B\times_\beta\mathbb{Z})\otimes K$．Thom同型により，$K^0(A)\cong K^1(B\times_\beta\mathbb{Z})$, $K^1(A)\cong K^0(B\times_\beta\mathbb{Z})$．いま C*環の完全系列 $0\to SB\xrightarrow{\iota} A\xrightarrow{\varphi} B\to 0$ を $\varphi(f)=f(0)$ により与えると，六項完全系列

$$\begin{tikzcd} K^0(SB) \arrow[r, "\iota_*"] & K^0(A) \arrow[r, "\varphi_*"] & K^0(B) \arrow[d, "\delta_0"] \\ K^1(B) \arrow[u, "\delta_1"] & K^1(A) \arrow[l, "\varphi_*"] & K^1(SB) \arrow[l, "\iota_*"] \end{tikzcd}$$

が得られる．ここで δ_0, δ_1 を詳細に検討すればよい．

<u>直接の証明</u>．ユニタリでない等長作用素 S から生成される C*環を $C^*(S)$ とすれば，C*環の完全系列 $0\to K\xrightarrow{\iota_0}C^*(S)\xrightarrow{\varphi_0}C(T)\to 0$ が得られる．ただし，ι_0 は K を生成する行列単位 e_{ij} $(i,j\geq 0)$ から $S^i(1-SS^*)S^{*j}$ への対応であり，$\varphi(S)=(z\mapsto z)$ である．つぎに，C*系 $(B,\mathbb{Z},\beta)$ に対し，$B\times_\beta\mathbb{Z}\cong C^*(B\otimes 1, u\otimes\rho(\mathbb{Z}))$ を $\mathfrak{H}\otimes\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ へ制限したものを E とすれば，E は $B\otimes 1$ と $u\otimes S$ により生成され，C*環の完全系列 $0\to B\otimes K\xrightarrow{\iota}E\xrightarrow{\varphi}B\times_\beta\mathbb{Z}\to 0$ が得られる．ただし，$\iota(b\otimes e_{ij})=u^i b u^{*j}\otimes\iota_0(e_{ij})$．したがって六項完全系列をもとに，六角形の完全系列

$$\begin{tikzcd} & & K^0(B) \arrow[d] \arrow[drr] & & \\ K^0(B) \arrow[urr] \arrow[rr] & & K^0(E) \arrow[rr] & & K^0(B\times_\beta\mathbb{Z}) \arrow[d] \\ K^1(B\times_\beta\mathbb{Z}) \arrow[u] & & K^1(E) \arrow[ll] & & K^1(B) \arrow[ll] \arrow[dll] \\ & & K^1(B) \arrow[u] \arrow[ull] & & \end{tikzcd}$$

を得る．

この論法は A_θ や $C^*(F_n)$ の K群を求めるときに有効である．なお，この 3.7.1 から Thom同型を導くことができる．

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \boxed{K^0} \\
\uparrow & & & & \downarrow \\
\boxed{K^1} & \longleftarrow & \mathbb{Z}^2 & \longleftarrow & \mathbb{Z}^3
\end{array}
$$

3.8 Mayer-Vietoris 完全系列　$A_i \xrightarrow{j_i} B$ $(i=1,2)$ に対し，$A_1 \oplus_B A_2$ を A_1 と A_2 のB上のファイバー積とすると，

$$
\begin{array}{ccccc}
K^0(A_1 \oplus_B A_2) & \xrightarrow{i_*} & K^0(A_1) \oplus K^0(A_2) & \xrightarrow{j_*} & K^0(B) \\
\uparrow & & & & \downarrow \\
K^1(B) & \xleftarrow{j_*} & K^1(A_1) \oplus K^1(A_2) & \xleftarrow{i_*} & K^1(A_1 \oplus_B A_2)
\end{array}
$$

は完全系列である．ただし，$i_*(a) = (i_{1*}a,\ i_{2*}a)$，$j_*(a, b) = j_{1*}a - j_{2*}b$ である．

ファイバー積の説明から始める．可換図式 $A \underset{i_2}{\overset{i_1}{\rightrightarrows}} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \underset{j_2}{\overset{j_1}{\rightrightarrows}} B$ において，(イ) j_1 または j_2 は全射，(ロ) $j_1(a_1) = j_2(a_2)$ をみたす任意の $(a_1, a_2) \in A_1 \oplus A_2$ に対し $i_1(a) = a_1$, $i_2(a) = a_2$ をみたす a が一意に存在する。このとき，A を A_1 と A_2 のB上のファイバー積といい，$A_1 \oplus_B A_2$ と書く．これは $A_1 \oplus A_2$ の部分C*環 $\{(a_1, a_2) \in A_1 \oplus A_2 : j_1(a_1) = j_2(a_2)\}$ と同型である．

さて，$J_1 = \mathrm{Ker}\, i_1$，$J_2 = \mathrm{Ker}\, j_2$ とする．j_1 が全射なら，i_2 は J_1 から J_2 への同型写像になる：

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & J_1 & \xrightarrow{\iota_1} & A & \xrightarrow{i_1} & A_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle i_2|J_1} & & \downarrow{\scriptstyle i_2} & & \downarrow{\scriptstyle j_1} & & \\
0 & \longrightarrow & J_2 & \xrightarrow[\iota_2]{} & A_2 & \xrightarrow[j_2]{} & B & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

実際，$x \in J_1$ なら，$j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2$ を用いて，$i_2(x) \in J_2$．逆に，$y \in J_2$ ならば，i_2 が全射であるから，$i_1(x) = 0$，$i_2(x) = y$ をみたす $x \in A$ が唯一つある．したがって，i_2 を J_1 へ制限したものは，J_1 から J_2 への同型写像である．したがって，六項完全系列を用いて，新たな完全系列

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\longrightarrow & K^1(A) & \xrightarrow{i_{1*}} & K^1(A_1) & \xrightarrow{\delta} & K^0(J_1) & \xrightarrow{\iota_{1*}} & K^0(A) & \xrightarrow{i_{1*}} & K^0(A_1) \\
 & \downarrow{\scriptstyle i_{2*}} & & \downarrow{\scriptstyle j_{1*}} & & \|{\scriptstyle (i_2|J_1)_*} & & \downarrow{\scriptstyle i_{2*}} & & \downarrow{\scriptstyle j_{1*}} \\
\longrightarrow & K^1(A_2) & \xrightarrow[j_{2*}]{} & K^1(B) & \xrightarrow[\delta]{} & K^0(J_2) & \xrightarrow[\iota_{2*}]{} & K^0(A_2) & \xrightarrow[j_{2*}]{} & K^0(B)
\end{array}
$$

を作る．$\delta' = \iota_{1*} \circ (i_2|J_1)_* \circ \delta$ を $K^1(B)$ から $K^0(A)$ への準同型写像とみると，完全系列 $K^1(A) \xrightarrow{i_*} K^1(A_1) \oplus K^1(A_2) \xrightarrow{j_*} K^1(B) \xrightarrow{\delta'} K^0(A) \xrightarrow{i_*} K^0(A_1) \oplus K^0(A_2) \xrightarrow{j_*} K^0(B)$ が得られる．懸垂により，Mayer-Vietoris 完全系列が得られる．

ここでは逆に，Mayer-Vietoris 完全系列を初めに証明しておいてから，六項完全系列を示すこともできる．その際には，δ' を Index 写像の構成と同じように作ればよい．Mayer-Vietoris 完全系列は準層C*環のK群を求めるときに有効である．

4. Kasparov の K K 理論

ここでは，C^*環の対 A, B から可換群 $KK(A,B)$ への KK ファンクターを考える．これは Atiyah の K ホモロジーや BDF 理論を一般化したものであるが，$KK(\mathbb{C},B)\cong K(B)$, $KK(A,\mathbb{C})\cong K_0(A)$ が成り立ち，K 群と K ホモロジーの両方の性質を備えている．さらに KK ファンクターには，結合法則をみたす Kasparov 積 $(x, y)\in KK(A,B)\times KK(B,C)\mapsto y\circ x\in KK(A,C)$ が定義できるので，この積に関して $KK(A,B)$ または $KK(B,C)$ が可逆な元を含めば，$K_0(A)\cong K_0(B)$ または $K(B)\cong K(C)$ となる．Kasparov 自身による群 C^*環の研究や Connes による葉層 C^*環の研究では，このような可逆元の存在を論じたものが多い．高井氏の講演もそうである（同氏の講演記録参照）

4.1 <u>C^*環の拡大と K_1 ホモロジー</u>　C^*環の完全系列 $0\to K\to E\to A\to 0$ により与えられる C^*環 E を A の<u>拡大</u>，または K の A による<u>拡大</u>という．このような拡大の分類をするには，通常次の図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, dashed] & A \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\tau"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\iota_0"'] & \mathcal{L}(\mathfrak{H}) \arrow[r, "\varphi_0"'] & Q(\mathfrak{H}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

により，E を K の Multiplier 環 $M(K)=\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ の部分 C^*環へ埋蔵し，この拡大と A から Calkin 環 $Q(\mathfrak{H})$ の中への（単位的）単準同型写像 $\tau=\varphi_0\circ\varphi^{-1}$ とを対応させ，拡大の分類を単準同型写像の分類に帰着させる．$\mathrm{Ext}(A)$ はこのような（単位的）単準同型写像全体を $Q(\mathfrak{H})$ の内部自己同型で割ったものとして定義される．単準同型写像 τ を含む同値類を $[\tau]$ と表すことにすれば，$\mathrm{Ext}(A)$ は加法 $[\tau_1]+[\tau_2]=[\tau_1\oplus\tau_2]$ により可換半群になる．ただし，$\mathfrak{H}$ が可算無限次元であることを用いて得られる関係

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}(\mathfrak{H})\oplus\mathcal{L}(\mathfrak{H}) \arrow[d] \subset \mathcal{L}(\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}) \arrow[r, hook] & \mathcal{L}(\mathfrak{H}) \arrow[d] \\
Q(\mathfrak{H})\oplus Q(\mathfrak{H}) \arrow[r, hook] & Q(\mathfrak{H})
\end{tikzcd}$$

は今後も断わりなく利用する．とくに τ が持ち上げ (Lifting) ρ :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{L}(\mathfrak{H}) \arrow[d, "\varphi_0"] \\
A \arrow[ur, dashed, "\rho"] \arrow[r, "\tau"'] & Q(\mathfrak{H})
\end{tikzcd}$$

をもつとき，つまり単準同型写像 $\rho : A\to\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ が存在して上の図式が可換になるときには，$[\tau]=0$ である．さらに，A が

核型のときは，$\mathrm{Ext}(A)$ は可換群になり，K_1ホモロジーそのものである．ここで得られた反変ファンクター Ext は K群と同じような性質をみたすが省略する．

例　$\mathrm{Ext}(\mathbb{C})=0$

Pimsner-Popa-Voiculescu はこれをさらに一般化して，拡大 $0\to K\otimes C(X)\to E\to A\to 0$ の分類を行った．Kasparov [6] はこれと独立に，ほぼ時を同じくして拡大 $0\to K\otimes B\to E\to A\to 0$ の分類を論じた．

4.2　K_0ホモロジー　単準同型写像 $\varphi: A\to\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ と $\varphi(a)F-F\varphi(a)\in K(\mathfrak{H})$ ($\forall a\in A$) をみたすフレドホルム作用素 $F\in\varphi_0^{-1}(U(Q(\mathfrak{H})))$ からなる対 (φ, F) の全体を考える．この集合のホモトピー類全体は加法 $[\varphi_1,F_1]+[\varphi_2,F_2]=[\varphi_1\oplus\varphi_2, F_1\oplus F_2]$ により可換半群になるので，そのGrothendieck群 $K_0(A)$ を A の Kホモロジー または K_0ホモロジー という．

これでは直感的な意味がわからない．そこで，動機がわかるようにいい換えよう．無限次元可分ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$，単準同型写像 $\psi_i: A\to\mathcal{L}(\mathfrak{H}_i)$ および $\psi_1(a)F-F\psi_2(a)$：コンパクト ($\forall a\in A$) をみたす $\mathfrak{H}_0$ から $\mathfrak{H}_1$ へのフレドホルム作用素 F をみたす五つ組 $(\mathfrak{H}_1,\psi_1,\mathfrak{H}_2,\psi_2,F)$ の全体を $\mathrm{Ell}(A)$ とする(楕円型作用素の一般化)．これは加法 $(\mathfrak{H}_1,\psi_1,\mathfrak{H}_2,\psi_2,F)+(\mathfrak{H}_1',\psi_1',\mathfrak{H}_2',\psi_2',F')=(\mathfrak{H}_1\oplus\mathfrak{H}_1',\psi_1\oplus\psi_1',\mathfrak{H}_2\oplus\mathfrak{H}_2',\psi_2\oplus\psi_2',F\oplus F')$ により可換半群になる．これを次の三条件により決まる同値関係で割ったものが $K_0(A)$ である：(イ) $\mathfrak{H}_1$ から $\mathfrak{H}_2$ へのユニタリ作用素 u_1, u_2 が存在して，$u_1\psi_1(a)=\psi_1'(a)u_1$, $u_2F=F'u_1$, $u_2\psi_2(a)=\psi_2'(a)u_2$ のとき，$(\mathfrak{H}_1,\psi_1,\mathfrak{H}_2,\psi_2,F)\sim(\mathfrak{H}_1',\psi_1',\mathfrak{H}_2',\psi_2',F')$; (ロ) $(\mathfrak{H}_1,\psi_1,\mathfrak{H}_2,\psi_2,F)+(\mathfrak{H},\psi,\mathfrak{H},\psi,1)=(\mathfrak{H}_1,\psi_1,\mathfrak{H}_2,\psi_2,F)$; (ハ) $\psi(a)-\psi'(a)\in K$ かつ F, F' の極分解 $F=v|F|$, $F'=v'|F'|$ に対し

$v-v'\in K$ のとき，$(\mathfrak{H}_1,\psi,\mathfrak{H}_2,\psi,F)\sim(\mathfrak{H}_1,\psi',\mathfrak{H}_2,\psi',F')$．実は，$K_0(A)$は可換群になる．$(\mathfrak{H},\psi,\mathfrak{H},\psi,1)$を含む類が零元であり，$(\mathfrak{H}_1,\psi_1,\mathfrak{H}_2,\psi_2,F)$を含む類の逆元は$(\mathfrak{H}_2,\psi_2,\mathfrak{H}_1,\psi_1,F^*)$を含む類である．$K_0$は反変ファンクターである．

前の定義との関係を見るためには，$(\mathfrak{H}_1,\psi_1,\mathfrak{H}_2,\psi_2,F)$を$\left(\begin{pmatrix}\psi_1&0\\0&\psi_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&F^*\\F&0\end{pmatrix}\right)$のように対にしてみるとよい．

例　$K_0(\mathbb{C})=\mathbb{Z}$，$K_0(S^n)=\begin{cases}\mathbb{Z}^2 & (n:\text{偶数})\\ \mathbb{Z} & (n:\text{奇数})\end{cases}$

4.3　<u>KKファンクター</u>　Kasparov自身による定義からはじめる．A, BをC^*環とする．準同型写像$\varphi: A\to M(K\otimes B)$と$F\in M(K\otimes B)$から成る対$(\varphi,F)$の中で，$[\varphi(a),F]$，$(F^2-1)\varphi(a)$，$(F-F^*)\varphi(a)$がどれも$K\otimes B$に含まれるようなものの全体は加法$(\varphi,F)+(\varphi',F')=(\varphi\oplus\varphi',F\oplus F')$により可換半群になる．ただし，右辺では$M(K\otimes B)\oplus M(K\otimes B)\subset M_2(M(K\otimes B))\subset M(M_2(K\otimes B))\hookrightarrow M(K\otimes B)$のような同一視を行っている．この半群のホモトピー同値類の全体$KK(A,B)$は可換群になる．上の三つの関係がどれも0となる(φ,F)の類が零元であり，(φ',F')を含む類の逆元は$(\varphi',-F')$を含む類である．注4

もう少し直感的な定義がCuntzにより与えられている．これを用いると，KasparovのようにBに狭義正値元の存在を仮定せずにKK群が定義できる．

AからBへの<u>疑似準同型写像</u>(quasihomomorphism) $A\to E\rhd J\subset B$とは，AからEへの準同型写像の対$(\psi,\bar{\psi})$で，$\psi(a)-\bar{\psi}(a)$がJに含まれるようなものである（JはEの閉イデアルであり，Bの部分C^*環である）．通常はこの外に，Eが$\psi(A)$と$\bar{\psi}(A)$により，Jが$\psi(a)-\bar{\psi}(a)$, $a\in A$により生成され，JがEにおいてessentialであることも仮定する．こうすると，疑似準同型写像$(\psi,\bar{\psi})$

は1次形式 $D_\psi(a)=\psi(a)-\overline{\psi}(a)$, 2次形式 $Q_\psi(a,b)=\psi(ba)D_\psi(a)$ の値により一意に定まる. そこで, $(\psi_0,\overline{\psi}_0)$ と $(\psi_1,\overline{\psi}_1)$ がホモトープであることを, D_{ψ_0}, Q_{ψ_0} が, D_{ψ_1}, Q_{ψ_1} とホモトープであることで定義する.

A から $K\otimes B$ への疑似準同型写像のホモトピー類の全体が $KK(A,B)$ と一致し, 加法は $(\psi_1,\overline{\psi}_1)+(\psi_2,\overline{\psi}_2)=(\psi_1\oplus\psi_2,\overline{\psi}_1\oplus\overline{\psi}_2)$ で与えられる. ただし, 右辺では $(K\otimes B)\oplus(K\otimes B)\subset M_2(K\otimes B)\hookrightarrow K\otimes B$ のような同一視を行っている. $[\psi,\psi]=0$, $[\overline{\psi},\psi]=-[\psi,\overline{\psi}]$ である.

4.4 Kasparov 積 KKファンクターで最も重要な役割を果すのが Kasparov 積 $(x,y)\in KK(A,B)\times KK(B,C)\mapsto y\circ x\in KK(A,C)$ である. ただし, A は可分であることを仮定する. x, y の代表元である疑似準同型写像を $(\varphi,\overline{\varphi}): A\to E_1\rhd J_1\subset K\otimes B$, $(\psi,\overline{\psi}): B\to E_2\rhd J_2\subset K\otimes C$ とする. $(\psi,\overline{\psi})$ を $K\otimes B$ へ拡張した $(\psi\otimes id,\overline{\psi}\otimes id)$ を改めて $(\psi,\overline{\psi})$ と書く. これを J_1 へ制限したものが, E_1 へ拡張できても, $(\varphi,\overline{\varphi})$ と $(\psi,\overline{\psi})$ の合成が疑似準同型写像に成るかどうかわからないので, $(\psi,\overline{\psi})|_{J_1}$ とホモトープな疑似準同型写像の中で E_1 に拡張でき, しかも $E_1\hookrightarrow M(J_1)$ とできるものを改めて $(\psi,\overline{\psi})$ と書く. そこで $\alpha=\begin{pmatrix}\psi\varphi & 0\\ 0 & \overline{\psi}\overline{\varphi}\end{pmatrix}$, $\overline{\alpha}=\begin{pmatrix}\overline{\psi}\varphi & 0\\ 0 & \psi\overline{\varphi}\end{pmatrix}$ とおき, $\alpha(A)$ と $\overline{\alpha}(A)$ の生成する C^*環を D, $Ad\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ を D へ制限したものを τ とすれば, $\alpha(a)-\tau(\overline{\alpha}(a))\in M_2(J_2)$. したがって, $(\alpha,\tau\circ\overline{\alpha})$ は A から $K\otimes C$ への疑似準同型写像である. これを含むホモトピー類を $y\circ x$ とする.

Kasparov 積が結合法則 $z\circ(y\circ x)=(z\circ y)\circ x$ をみたすこともわかる.

4.5 基本的性質 KKファンクターは第一変数に関し反変, 第二変数に関し共変である. この外, K群のところで述べたものと同じような性質が成りたつ.

4.5.1　$KK(A, \mathbb{C}) \cong K_0(A)$　Kホモロジー

4.5.2　$KK(\mathbb{C}, B) \cong K^0(B)$　K群

これらの証明はCuntzの定義に戻るとわかり易い。

4.5.3　$KK(A_1, B_1) \times KK(A_2, B_2) \longmapsto KK(A_1 \otimes A_2, B_1 \otimes B_2)$ のような積が定義できる。

…omology 周期性

4.5.4　$K_nK^m(A, B) = KK(S^nA, S^mB)$ とおくと、Bottの周期性 $KK(A,B) \cong K_2K(A,B) \cong K_1K^1(A,B) \cong KK^2(A,B)$ が成りたつ。ただし、添字が0のときは省いている。とくに $KH_0(S^2A) = KH_0(A)$

4.5.5　Aが核型ならば、$KK^1(A,B) \cong Ext(A,B)$. 一般のC^*環のときは、$KK^1(A,B)$ は $Ext(A,B)$ の可逆な部分である。

…omology 完全列

4.5.6　$0 \to J \to E \to A \to 0$ が完全で、Eが核型ならば、$\cdots \to K_n(E,B) \to K_nK(J,B) \to K_{n-1}K(A,B) \to K_{n-1}K(E,B) \to \cdots$ も完全である。

…の …系列

4.5.7　$0 \to J \to E \to B \to 0$ が完全で、Jが狭義正値元をもてば、$\cdots \to KK^n(A,E) \to KK^n(A,B) \to KK^{n+1}(A,J) \to KK^{n+1}(A,E) \to \cdots$ も完全である。

4.5.8　普遍係数定理　C^*環の完全系列 $0 \to K \otimes B \to E \to A \to 0$ に対し $0 \to Ext^1_{\mathbb{Z}}(K^0(A), K^0(B)) \oplus Ext^1_{\mathbb{Z}}(K^1(A), K^1(B)) \to Ext(A,B) \xrightarrow{\gamma} Hom(K^0(A), K^1(B)) \oplus Hom(K^1(A), K^0(B)) \to 0$ も完全である。ただし、$\gamma([E]) = (\delta, \delta)$ である。これにより、C^*環の拡大がK群から定まる量により系統的に分類できる。とくに、$A = C(X)$ $(X \subset \mathbb{C})$, $B = \mathbb{C}$ の場合がBDF理論で重要になる。

5 例 いくつかの例を選んで，もう少し詳しい解説をする．

5.1 AF環 順序加群 (G, G^+) が次の二つの条件をみたすとき次元群という：(イ) $a+\cdots+a\in G^+$ ならば，$a\in G^+$；(ロ) $a_i\le b_j$ $(i,j=1,2)$ ならば，$a_i\le c\le b_j$ $(i,j=1,2)$ をみたす c が在る．AF環の安定同型類と次元群は1対1に対応している．AF環の次元群は $K^0(A)$ に射影元の大,小関係を入れたものである．AF環でない C^*環の K^0群にも順序を考えることは有意義と思われる．（武元氏の講演記録参照）

5.2 無理数回転環 $A_\theta = C(\mathbb{T})\times_\alpha \mathbb{Z}$ $\left((\alpha f)(z)=f(e^{2\pi\theta i}z) \right)$ は交換関係 $uv=e^{2\pi\theta i}vu$ をみたす二つのユニタリ作用素 u, v から生成される C^*環に同型である．Powers は A_θ が単純であることを示し，Rieffel は $p=f_1u+f_0+u^*f_{-1}$ という形の自明でない射影元を作って，Kadison の予想に決着をつけた．（注：差分方程式により記述される概Mathieuハミルトニアン $h(\lambda)=u+u^*+\lambda(v+v^*)$ のスペクトルに ~~Mou~~ gap があることがわかるので，A_θ には自明でない射影元がある．~~事実~~ Powers は $A_{\frac{1}{2}}$ が射影元をもつことを用いてこの事を Rieffel が上の p を与える前から知っていたそうである）．つづいて，Pimsner-Voiculescu は $K^0(A_\theta)\cong\mathbb{Z}^2$，$K^1(A_\theta)\cong\mathbb{Z}^2$ であって，それぞれの生成元が，$[1]$，$[p]$ および $[u]$，$[v]$ であることと，A_θ 上の規格化されたトレース τ により $\tau(K^0(A_\theta))=\mathbb{Z}+\theta\mathbb{Z}$ となることを示した．これにより，$A_\theta\cong A_{\theta'}$ $(\theta,\theta'\in[0,1])$ であるための完全条件が，$\theta=\theta'$ または $\theta=1-\theta'$ であることが判明した．この最後の結果に対し，Cuntz は簡単な別証を与えている．

2次元トーラス $V=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 上の流れ $T_t(x,y)=(x+\theta t,\ y+t)$ $(\mathrm{mod}\ \mathbb{Z}^2)$

から導かれる葉層構造を F $(dx=\theta dy)$ とすれば, $C^*(V,F)\cong C(V)\times_\alpha \mathbb{R}$ となる. ただし, $\alpha_t f = f\circ T_t^{-1}$. 軌道の切口として, 1次元トーラス $X=\{(x,0)\in V: x\in \mathbb{R}/\mathbb{Z}\}$ を考え, $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を X へ誘導した変換を S とすれば, $Sx=x+\theta$ $(\mathrm{mod}\ \mathbb{Z})$ となる. $C(X)$ 上で $\beta g = g\circ S^{-1}$ とすれば, C^*系 $(C(X),\mathbb{Z},\beta)$ は C^*系 $(C(V),\mathbb{R},\alpha)$ を誘導する. したがって, $C(V)\times_\alpha\mathbb{R}\cong(C(X)\times_\beta\mathbb{Z})\otimes K\cong A_\theta\otimes K$ となり, $C^*(V,F)$ と A_θ の K理論は一致する.

5.3 自由群 F_n $(n\geq 2)$ の群C^*環の研究は Kadison の予想 "$C^*_{red}(F_n)$ は自明でない射影元をもたない" を目標に行われた. まず Cohen が $C^*(F_n)$ は自明でない射影元をもたないことを示し, Cuntz が $K^0(C^*(F_n))\cong\mathbb{Z}$, $K^1(C^*(F_n))\cong\mathbb{Z}^n$ を示した. ついで, Pimsner–Voiculescu が $K^0(C^*_{red}(F_n))$ の生成元が $[1]$ であることを示し, 予想を肯定的に解決した. Cuntz は, $KK(C^*(G), C^*_{red}(G))$ が Kasparov 積に関し逆元な元を含むとき, <u>K従順</u>ということにし, 従順群, 自由群等がK従順であることと, 性質Tをもつ無限群はK従順でないことを示した. これにより上の結果はさらに見通し良くなった. Cuntz は正則表現から導かれる準同型写像 $\varphi: C^*(G)\to C^*_{red}(G)$ に対し, $K^*(C^*(G))\cong K^*(C^*_{red}(G))\oplus K^*(\mathrm{Ker}\,\varphi)$ を予想している. Lance は上の Pimsner–Voiculescu の結果を一般化して, 別証を与えている. その際, 可算離散無限群に対し<u>性質Λ</u>という条件を導入している. これが成立すると, 長田嬢のいう <u>Haagerupの性質</u>が云えるが, K従順も含めたこれら三つの条件の相互関係はわかっていない. 従順群や自由群を含むが, 性質Tをもつ群を含まない可算離散無限群のクラスの決定が待たれる (長田嬢の講演

Heisenberg Lie 群
の K^0, K^1 はともに 0

記録参照). $K_1(C^*(F_n)) \cong \mathbb{Z}^n$ (市原氏の証明がある).

5.4 Fell や Kirillov は 3次元ハイゼンベルグ群 $G=\left\{\begin{pmatrix}1&x&z\\0&1&y\\0&0&1\end{pmatrix}: x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$ に対し, C^*環の完全系列 $0\to C_0(\mathbb{R}\setminus\{0\})\otimes K\to C^*(G)\xrightarrow{\varphi} C_0(\mathbb{R}^2)\to 0$ は分裂するか?, という問題を提起した. ただし, φ は表現 $\begin{pmatrix}1&x&z\\0&1&y\\0&0&1\end{pmatrix}\longmapsto \left((a,b)\mapsto e^{i(ax+by)}\right)$ から導かれたものである. Kasparov は $\mathrm{Ext}(C_0(\mathbb{R}^2), C_0(\mathbb{R}\setminus\{0\}))\cong\mathbb{Z}^2$ であって, 上の拡大は $(-1,-1)$ に対応していることを示し, 分裂しないことを示した. Rosenberg も $2n+1$ 次元ハイゼンベルグ群 H_{2n+1} に対して同様な結果を普遍係数定理を用いて示し, その系として $K^0(C^*(H_{2n+1}))=K^1(C^*(H_{2n+1}))=0$ を示した. Kasparov はこの結果をさらに拡張している.

単連結, 可解リー群 G の群 C^*環の K群は Kasparov により求められた. G は単連結, 閉正規部分群と $\mathbb{R}$ の半直積に表せるので, Thom同型を繰り返して, $K^i(A)\cong K^{i+j}(A\times_\alpha G)$ ($j=\dim G \pmod 2$). ここで, $A=\mathbb{C}$ とすればよい.

群 G が $\mathbb{R}^n$ とコンパクト群 H の半直積で与えられた運動群のときは, $C^*_{red}(G)\cong C(\hat{\mathbb{R}}^n)\times_\alpha H$. したがって, $K^*(C^*_{red}(G))\cong K^*_H(C(\hat{\mathbb{R}}^n))\cong K^*_H(\mathbb{C})\cong R(H)$. ただし, $R(H)$ は H の表現環である.

5.5 最後に Connes による非可換微分幾何について少し触れておく. リー群 G の作用する C^*系 (A,G,α) に対し, A 上に規格化された α 不変トレース τ の存在を仮定すれば, $K^*(A)=K^0(A)\oplus K^1(A)$ から G の de Rham コホモロジー環 $H^*_{\mathbb{R}}(G)$ への群準同型写像 $ch_\tau: K^*(A)\to H^*_{\mathbb{R}}(G)$ が構成できる.

例 1. $(A,\mathbb{R},\alpha)$ の場合には, $ch_\tau([u]) = \frac{1}{2\pi i}\tau(\delta(u)u^*)$, $u\in U(A)$.

$[u]\in K^1(A) \xrightarrow{ch_\tau}$

これを用いると，単位元のない単純C^*環で，自明でない射影元はもたないものの例が作れる．
$$K^0(A)\ni[e]$$

例2．$(A,\mathbb{R}^2,\alpha)$の場合には　$ch_\tau([e])=\tau(e)+c_1(e)\varepsilon^1\wedge\varepsilon^2\in H^*_{\mathbb{R}}(G)$．ただし，$\varepsilon^1,\varepsilon^2$は$G=\mathbb{R}^2$のリー環$\mathfrak{g}$の標準基底である．このとき，$c_1(e)$は<u>オーChern数</u>といわれ，$c_1(e)=\frac{1}{2\pi i}\tau(e[\delta_1(e),\delta_2(e)])$となる．ただし，$\delta_1,\delta_2$は$\varepsilon^1,\varepsilon^2$に対応して$\alpha$から導かれる微分子である．たとえば，$A=A_\theta$のときには，$c_1(K^0(A_\theta))=\mathbb{Z}$であり，とくに$c_1(p)=1$となる．したがって，$\alpha$にどんな1コサイクル摂動を行っても，$p$を不変にする作用は作れないことがわかる．

例3．$G=\mathbb{R}^n$の場合には指数定理を一般化して，C^*環の完全系列 $0\to A\otimes_\alpha\mathbb{R}^n\to E\to A\otimes C(S^{n-1})\to 0$ が得られる．ただし，表象$a\in\mathcal{S}'(\hat{\mathbb{R}}^n,A^\infty)$に対応する疑微分作用素は$P_a=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{a}(s)V_s\,ds\in M(A\times_\alpha\mathbb{R}^n)$であり，$\sigma(P_a)$はその主表象である．$D\in E$が楕円型作用素のときには，$\hat{\tau}(\delta(D))=\langle ch_\tau(\sigma(D)),\varepsilon^1\wedge\cdots\wedge\varepsilon^n\rangle$となる．ただし，$\delta$はIndex写像$K^1(A\otimes C(S^{n-1}))\to K^0(A\times_\alpha\mathbb{R}^n)$である．$G$がリー群の場合にも同様の式が成りたつそうである．とくに，$A=A_\theta$，$G=\mathbb{T}^2$とすると，$A_\theta\times_\alpha\mathbb{T}^2\cong K$となり，$\hat{\tau}\circ\delta$は整数値になる．これは$c_1(p)=1$の別の解釈を与えている．

以上の議論の中で，chern指標を定義するには，接続，曲率などの概念が必要になるが，たとえば，$A=C(\mathbb{R}^n)$，$G=\mathbb{R}^n$のときには，それらも疑微分作用素などの概念も通常のものと一致している．

文　献

(イ)入門解説

[1] Taylor, J.L., Banach algebras and topology, Algebras and Analysis (Ed. J.H. Williams) Academic Press, 1975

[2] Karoubi, M., K-theory, An introduction, Springer-Verlag, 1978

[3] Atiyah, M., K-theory, Benjamin, 1967

(ロ)C^*環でのK理論研究の本格化

[4] Connes, A., Sur la théorie non commutative de l'intégration, Algèbre d'Operateurs (Ed. P. de la Harpe) Springer Lecture Notes in Math. 725.

[5] Cuntz, J., K-theory for certain C^*-algebras, Ann. of Math., 113 (1981), 181–197.

[6] Kasparov, G.G., The operator K-functor and extensions of C^*-algebras, Izv. Acad. Nauk. SSSR, 44 (1980), 571–636.

[7] Pimsner, M. and D. Voiculescu, Exact sequences for K-groups and Ext-groups of certain cross-products of C^*-algebras, J. Operator Theory 4 (1980), 93–118.

(ハ)C^*環のK理論の概説

[8] Connes, A., A survey of foliations and operator algebras, Proc. Symp. Pure Math. 38 (1981),

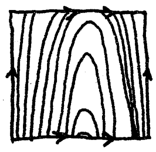
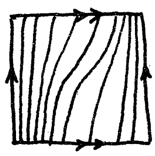
[9] Cuntz, J., The internal structure of simple C^*-algebras, Proc. Symp. Pure Math. 38 (1981),

[10] Cuntz, J., K-theory and C^*-algebras, Preprint 1983.

[11] Douglas, R. G., C^*-algebra Extensions and K-homology, Ann. of Math. Studies, No 95, 1980.

[12] Rosenberg, J., Homological invariants of extensions of C^*-algebras, Proc. Symp. Pure Math. 38 (1981)

この他は [8, 9, 10, 11, 12] で引用されている文献を参照していただきたい.

注1. Fol I  Fol II 

注2. 岸本氏とEvansは$\mathcal{O}_n$と$\mathbb{R}$のゲージ作用の接合積$\mathcal{O}_n \times_\alpha \mathbb{R}$が単純でトレースをもつことを示した. Thom同型により$K^0(\mathcal{O}_n \times_\alpha \mathbb{R}) \cong K^1(\mathcal{O}_n) = 0$であるから, $\mathcal{O}_n \times_\alpha \mathbb{R}$は自明でない射影元をもたない (Elliott).

注3 位相的K群K^0, K^1に対し, 代数的K群はK_0, K_1と区別するのが普通であるが, これではKホモロジーと紛らわしいので, ここではK群はK^i, KホモロジーはK_iとした. 単位的C^*環Aの代数的K群を$K^i_{alg}(A)$と書くことにすれば, $K^0_{alg}(A)$はA加群を用いた$K^0(A)$により, $K^i_{alg}(A)$ $(i \geq 1)$は離散群$GL(\bigcup_n M_n(A))$の分類空間$BGL(\bigcup_n M_n(A))$の部分空間$BGL(\bigcup_n M_n(A))^+$を用いた$K^i_{alg}(A) = \pi_i(BGL(\bigcup_n M_n(A))^+)$により定義される. とくに, $K^1_{alg}(A) = U(\bigcup_n M_n(A))/$(交換子群), $K^2_{alg}(A) = H_2$(交換子群, $\mathbb{Z}$)である. $K^i(A \otimes K) \cong K^i_{alg}(A \otimes K)$が予想されている.

注4 Kasparovのもとの定義は, 実構造と, コンパクト群のEquivarianceも同時に扱える形で与えられている.